第六章 序贯分析初步*

第一节 序贯方法的重要性与两个要素

我们一般说，简单随机样本为$X_1, \cdots, X_n$。得到样本的方式可有许多种：同时得到（如同时掷20枚硬币）；逐个得到（如1枚硬币掷20次）；或更复杂（如有替换寿命试验）。本章讨论样本逐个得到的情形。

Q：“10枪3中”，可以是：① 仅有10发子弹，目标很多，射击之后发现中3个；② 子弹很多，目标3个，全射中后发现用了10发。信息有无区别?

有时，抽样未结束时，结论就已经明确，此时为节省费用，没必要继续抽样，统计上同样可靠。

例如，炮弹（合格率）验收，由前知，最好的方案是(n, C)方案：如共试射$n = 100$发，若失效数超过$C = 2$，则拒收。但若 ① 前98发皆合格，或 ② 前10发即有3发失效，显然可停止试验。

第一节 序贯方法的重要性与两个要素

进一步分析，若前80发皆合格，或前30发已有2发失效，是否可停止?

- 产生于1940年代（二战），代表人物是美国统计学家A. Wald。

- 背景为大量（昂贵）武器的（破坏性）验收。为美国节省了很多经费。

- 现代军火验收方面意义越来越大（如北大学生90年代工作）。

例1. 设$X\sim B(1,p)$，$H_0: p\le {}^1/_2$，设样本量为n，任一（给定）检验法为φ，则功效函数

$$\beta_\varphi(p)=E_p\varphi(X_1,\cdots,X_n)=\sum_{x_1,\cdots,x_n}\varphi(x_1,\cdots,x_n)p^{\sum x_i}(1-p)^{n-\sum x_i}$$

是p的多项式，故而连续。

因此，第I类错误概率和第II类错误概率的最大值分别满足：

第一节 序贯方法的重要性与两个要素

$$\alpha = sup\{\beta_\varphi(p): p \le 0.5\} \ge \beta_\varphi(0.5)$$
$$\beta = sup\{1 - \beta_\varphi(p): p > 0.5\} \ge 1 - \beta_\varphi(0.5)$$

即$\alpha + \beta \ge 1$。这对所有的n和φ都成立。所以，固定样本量方法不可能使两类错误的概率同时得到控制。

● 许多情况下，序贯方法可克服此弱点。

● 需要适当补充随机游动的内容（统计中偏概率论的方向）。

定义1. 给定随机变量序列$\{X_1, X_2, \cdots\}$，称取值于$\{0, 1, 2, \cdots\}$的随机变量τ为停止时间（stopping time，简称停时），若对任意$n \ge 1$，有

$$\{\tau = n\} = \{(X_1, \cdots, X_n) \in B_n\}$$

其中B_n为R^n中某Borel集。

直观意义：是否在第n步停止仅取决于$(X_1, \cdots, X_n)$，与$(X_{n+1}, \cdots)$无关。

第一节 序贯方法的重要性与两个要素

例2. （随机游动）你共有A元钱，你的对手共有B元钱。你们每赌一次，输赢为1元。设你每次赌胜的概率为$p \in (0, 1)$，则模型为一维随机游动。

记$\xi_i = \begin{cases} 1 & \text{若你第}i\text{局胜} \\ -1 & \text{否则} \end{cases}$，$X_0 = 0$，$X_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$，则$X_n$为你当前位置（赢钱数）。

如果不允许赊欠，则$-A$、 B为两个吸收壁。一个自然的停止法则（停时）为：一旦有人输光，赌博停止，即

$$\tau_1 = inf\{n: X_n = -A\text{或}X_n = B\}$$

仅依赖于$X_1, \cdots, X_n$。

令$\tau_2 = inf\{n: \xi_n = 1\}$，则
$\{\tau_2 = n\} = \{\xi_n = 1, \xi_1 = \cdots = \xi_{n-1} = -1\} = \{X_i = -i,\ i = 1, \cdots, n-1, X_n = 2-n\}$，故是停时，其直观意义是：只要你胜一次（首次胜利），就停止。

第一节 序贯方法的重要性与两个要素

$\tau_3 = n_0$（n_0已知）是停时，其含义是：约定玩n_0次。

$\tau_4 = min\{\tau_1, \tau_3\}$也是停时，其含义是：或输光，或到时，停止。

$\tau_5 = inf\{n: \xi_{n+1} =- 1\}$不是停时，其含义是：如果下局我输，则停止。实际上无法操作。

一般地，设$\xi_1, \cdots, \xi_n, \cdots$为独立同分布随机变量序列，令$X_0 = 0$，$X_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$，则有下列结论：

对R^1中任意的Borel集D，$\tau = inf\{n \geq 1, X_n \in D\}$是停时；特别地，对$D = (A, B)^c$，$\tau = inf\{n \geq 1, X_n \notin (A, B)\}$是停时（首次离开时刻）。

称停时τ是封闭的，若$P(\tau < \infty) = 1$（总能停止）。

称$\Delta = (\tau, d)$是一个序贯方法。一般要求τ是封闭的。

第二节 序贯概率比检验法

仍考虑最简单情形：参数空间仅包含两点。此时，

$$H_1: f(x) = f_1(x) \quad \leftrightarrow H_2: f(x) = f_2(x)$$

其中$f(x)$为总体X的概率密度函数或概率分布函数。写成H_1和H_2是因为，不同于第三章，两类错误概率将得到类似的对待。

设数据$X_1, \cdots, X_n, \cdots$是依次获得的。在时刻n，考虑似然比

$$\lambda_n = \frac{\prod_{i=1}^n f_2(X_i)}{\prod_{i=1}^n f_1(X_i)} = \prod_{i=1}^n \frac{f_2(X_i)}{f_1(X_i)}$$

如果λ_n太大，可以停止并拒绝H_1；如果λ_n太小，亦可以停止并接受H_1；如果λ_n大小适中，则暂可不下结论，再抽一个样本！

思想：一直抽样直到有“足够把握”拒绝或接受H_1。

Wald提出的方法：取待定常数$0 < A < 1 < B < \infty$，分别为“太小”、“太大”的界限。

第二节 序贯概率比检验法

定义1. 称序贯检验法$\Delta = (\tau^*, d^*)$为序贯概率比检验（SPRT），如果

$$\tau^* = inf\{n: n \geq 1, \lambda_n \notin (A, B)\}$$

$$d^* = \begin{cases} 1 & 若\lambda_{\tau^*} \geq B \\ 0 & 若\lambda_{\tau^*} \leq A \end{cases}$$

简记为$S(A, B)$。

由λ_n的定义，$\log(\lambda_n) = \sum_{i=1}^{n} log\left(\frac{f_2(X_i)}{f_1(X_i)}\right)$是一个随机游动，因此

$$\tau^* = inf\{n: n \geq 1, log(\lambda_n) \notin (logA, logB)\}$$

是停时，即$\Delta = (\tau^*, d^*)$确为序贯检验法。

定理1. 如果$\mu\{x: f_1(x) \neq f_2(x)\} > 0$，则

$$P_i(\tau^* < \infty) = 1 \qquad (i = 1, 2)$$

证明：略。

------------------end 20240525

第二节 序贯概率比检验法

定义1. 称序贯检验法$\Delta=(\tau^*, d^*)$为序贯概率比检验（SPRT），如果

$$\tau^*=inf\{n{:}\, n\geq 1, \lambda_n\notin(A, B)\}$$

$$d^*=\begin{cases}1 & 若\lambda_{\tau^*}\geq B\\ 0 & 若\lambda_{\tau^*}\leq A\end{cases}$$

简记为$S(A, B)$。

由λ_n的定义，$\log(\lambda_n)=\sum_{i=1}^{n} log\left(\frac{f_2(X_i)}{f_1(X_i)}\right)$是一个随机游动，因此

$$\tau^*=inf\{n{:}\, n\geq 1, log(\lambda_n)\notin(logA, logB)\}$$

是停时，即$\Delta=(\tau^*, d^*)$确为序贯检验法。

定理1. 如果$\mu\{x{:}\ f_1(x)\neq f_2(x)\}>0$，则

$$P_i(\tau^*<\infty)=1 \qquad (i=1, 2)$$

证明：略。

第二节 序贯概率比检验法

例1. 两点分布的检验，$X \sim B(1, p)$，

$$H_1: p = p_1 \quad \leftrightarrow H_2: p = p_2$$

其中$0 < p_1 < p_2 < 1$是已知的常数，求SPRT。

解：$f_1(x) = p_1^x(1-p_1)^{1-x}$，$f_2(x) = p_2^x(1-p_2)^{1-x}$，所以

$$\lambda_n = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{x_i} \left(\frac{1-p_2}{1-p_1}\right)^{1-x_i} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{S_n} \left(\frac{1-p_2}{1-p_1}\right)^{n-S_n}$$

其中$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$。故而，

$$log\lambda_n = S_n log\frac{p_2}{p_1} + (n - S_n) log\left(\frac{1-p_2}{1-p_1}\right)$$

由$log\frac{p_2}{p_1} > 0$，$log\left(\frac{1-p_2}{1-p_1}\right) < 0$，易知

$$\lambda_n \geq B \quad \Leftrightarrow S_n \geq R_n =: cn + d_1$$
$$\lambda_n \leq A \quad \Leftrightarrow S_n \leq A_n =: cn + d_2$$

第二节 序贯概率比检验法

其中

$$c=-\frac{log(1-p_2)-log(1-p_1)}{logp_2-logp_1-log(1-p_2)+log(1-p_1)}\in(0,\ 1)$$

$$d_1=\frac{logB}{logp_2-logp_1-log(1-p_2)+log(1-p_1)}>0$$

$$d_2=\frac{logA}{logp_2-logp_1-log(1-p_2)+log(1-p_1)}<0$$

因此，$\tau^*=inf\{n{:}\,n\geq 1,S_n\notin(A_n,R_n)\}$。

图像显示（画图），中间是继续区域，左上方拒绝，右下方接受。

● 形式简单，实用。

第二节 序贯概率比检验法

例2. 正态分布情形。设$X \sim N(\theta, 1)$，

$$H_1: \theta = \theta_1 \quad \leftrightarrow H_2: \theta = \theta_2$$

其中$\theta_1 < \theta_2$是已知常数，求SPRT。

解：

$$\lambda_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{f(x_i, \theta_2)}{f(x_i, \theta_1)} = \cdots = e^{(\theta_2 - \theta_1)S_n - \frac{n}{2}(\theta_2^2 - \theta_1^2)}$$

其中$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$。因此，

$$log\lambda_n = (\theta_2 - \theta_1)S_n - \frac{n}{2}(\theta_2^2 - \theta_1^2)$$

令

$$A_n = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \cdot n + \frac{logA}{\theta_2 - \theta_1}$$

$$R_n = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \cdot n + \frac{logB}{\theta_2 - \theta_1}$$

第二节 序贯概率比检验法

则

$$\tau^* = inf\{n: n \geq 1, S_n \notin (A_n, R_n)\}$$

图像为（画图）……，与两点分布情形类似，但S_n不必取整数值。

一个序贯检验法将平面分成3个区域：接受、拒绝、继续区域，SPRT由两条平行线划分，其斜率与H_1、H_2有关，而其截距与A、B有关。

如何选取A、B？取决于第I、第II类错误。

记$\alpha = P_1(\tau^* < \infty, \lambda_{\tau^*} \geq B)$（当$H_1$成立时，停止并拒绝$H_1$，即以真为假），$\beta = P_2(\tau^* < \infty, \lambda_{\tau^*} \leq A)$（当$H_2$成立时，停止并接受$H_1$，即以假为真）。我们不加证明地给出下列结论。

定理2. $\alpha \leq \frac{1}{B}(1-\beta)$，$\beta \leq A(1-\alpha)$。

第二节 序贯概率比检验法

这是两个很好的不等式：无论f_1、f_2是什么分布，均可用A、B直接来控制α、β（其它部分约为1）。

实际应用中，可采用近似方案：给定α、β，取$A^* = \frac{\beta}{1-\alpha}$，$B^* = \frac{1-\beta}{\alpha}$，则一般地，$A^*$、$B^*$与目标$A$、$B$相差不大。对于序贯概率比检验法$S(A^*, B^*)$，记$\alpha^*$、$\beta^*$分别为其第I、第II类错误的概率，则有：

定理3. $\alpha^* \le \frac{\alpha}{1-\beta}$，$\beta^* \le \frac{\beta}{1-\alpha}$，$\alpha^* + \beta^* \le \alpha + \beta$。

证明：略（不难）。

● 采用近似方案，第I、第II类错误的概率与原定的α、β差距不大，且并不增大两类错误概率之和，早期很有意义。

第二节 序贯概率比检验法

定理4. 设$\widetilde{\Delta}=\left(\tilde{\tau},\ \widetilde{d}\right)$为任一序贯检验法，其两类错误的概率满足$\widetilde{\alpha}\le\alpha$，$\widetilde{\beta}\le\beta$，其中$\alpha$、$\beta$为$S(A,\ B)$的两类错误的概率，则有

$$E_i\tau^*\le E_i\tilde{\tau}\qquad\qquad i=1,\ 2$$

● 说明其最优性：在控制两类错误概率的条件下，SPRT的平均样本量最小。

● 教材P286表2.1、表2.2表明，与固定样本量方法比较，许多情况下，大约可以节省50%的样本（μ_i为H_i成立时平均样本量/固定样本量）。

例3. 秘书问题：10人依次面试应聘，面试前i个人后，可知其排序，面试后需立即表示是否录用（仅1人），求使得找到最优者概率最大的策略。

例4. 设$X_1,\ \cdots,\ X_n,\cdots$独立同分布，$c>0$为每次观测费用，求$\tau$使得

$$E\left(max\{X_1,\ \cdots,\ X_\tau\}-c\tau\right)$$

最大。