第三讲：多项式插值

教师: 胡俊

北京大学数学科学学院

March 3, 2020

目录

1 交通流模型

2 多项式插值
- 牛顿多项式插值
- 拉格朗日插值
- 其他插值形式
- 插值误差
- Chebyshev 多项式
- 多项式插值的收敛性

3 样条插值
- 自然三次样条

4 追赶法
- 三对角矩阵(对角占优)
- 追赶法求解方程$Ax = d$

5 作业

目录

1 交通流模型

2 多项式插值
- 牛顿多项式插值
- 拉格朗日插值
- 其他插值形式
- 插值误差
- Chebyshev 多项式
- 多项式插值的收敛性

3 样条插值
- 自然三次样条

4 追赶法
- 三对角矩阵(对角占优)
- 追赶法求解方程$Ax = d$

5 作业

模型的建立基于下列假设:

1. 车辆沿一条无限长单向车道运动;
2. 车辆在单向车道内只能朝一个方向运动;
3. 单向车道是全封闭的，没有供车辆驶入或者驶出的岔路口;
4. 车辆相对于此序列中的其他车辆位置不发生改变，即没有抛锚或超车的情况.

为了便于建立模型，假设车辆运动的方向为x轴的正方向，$\rho(x,t)$ 为交通流的密度，表示单位距离上的车辆数目；$q(x,t)$为交通流的流量，表示车流在单位时间内通过某观测点x处的车辆数目.

考虑单项车道区间$[a,b]$内车辆数目的变化完全取决于在位置$x=a$处驶入的车辆及在位置$x=b$处驶出的车辆数目之差. 在位置x，在给定时间段$[t_0,t_1]$内的车辆数目为

$$N_1(x)=\int_{t_0}^{t_1} q(x,t)\,dt$$

故在时间段$[t_0,t_1]$内，区间段$[a,b]$内的车辆数目的变化为

$$\begin{aligned}\triangle N &= N_1(a)-N_1(b)\\ &= \int_{t_0}^{t_1} q(a,t)-q(b,t)\,dt\end{aligned} \tag{1.1}$$

而在区间$[a,b]$内车辆数目的变化为：时刻t_0 时区间内的车辆数目与时刻t_1 时相同区间的车辆数目之差. 在时刻t时，在区间$[a,b]$区间内的车辆数目为

$$N_2(t) = \int_a^b \rho(x,t)\,dx$$

故车辆数目的变化也可表示为

$$\begin{aligned} \triangle N &= N_2(t_1) - N_2(t_0) \\ &= \int_a^b \rho(x,t_1) - \rho(x,t_0)\,dx \end{aligned} \tag{1.2}$$

由方程(1.1)和(1.2)可以得到

$$\int_{t_0}^{t_1} q(a,t) - q(b,t)\,dt = \int_a^b \rho(x,t_1) - \rho(x,t_0)\,dx$$

假设密度$\rho(x,t)$和流量$q(x,t)$都是可微的函数，则

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_a^b \frac{\partial q}{\partial x}\,dx\,dt = \int_a^b\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dx\,dt$$

由区间段$[a,b]$和时间段$[t_0,t_1]$的任意性得到车辆守恒方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

该方程刻画了车辆数目守恒条件件下密度与流量的关系.

交通流模型

事实上，$q(x,t)$依赖于$\rho(x,t)$, 即$q(x,t)=q(\rho(x,t))$. 常用的模型

$$q(x,t)=\nu\rho(1-\frac{\rho}{\rho_i}).$$

引进变换

$$u=\rho-\frac{1}{2}\rho_i,\xi=-\frac{\rho_i}{2\nu}x$$

则得

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u^2/2}{\partial \xi}=0.$$

如果路段上有车辆的产生或离去，守恒方程一般形式为：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=g(x,t)$$

该模型首先由Lighthill, Whirham, Richards 独立提出，也称为 LWR 模型.

目录

1 交通流模型

2 多项式插值
- 牛顿多项式插值
- 拉格朗日插值
- 其他插值形式
- 插值误差
- Chebyshev 多项式
- 多项式插值的收敛性

3 样条插值
- 自然三次样条

4 追赶法
- 三对角矩阵(对角占优)
- 追赶法求解方程$Ax = d$

5 作业

多项式插值

给定

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

求一个次数尽可能低的多项式$P(x)$ 使得

$$P(x_i) = y_i, \quad 0 \leq i \leq n.$$

这样的多项式$P(x)$ 称为插值多项式.

多项式插值

Theorem 2.1

若$x_0, x_1, \cdots, x_n$ 互异, 则对任意$y_0, y_1, \cdots, y_n$, 都存在唯一的次数不超过n 的多项式P_n 使得

$$P_n(x_i) = y_i, \quad 0 \leq i \leq n.$$

证明: 先证唯一性. 假设存在两个次数不超过n 的多项式P_n, Q_n 使得

$$P_n(x_i) = Q_n(x_i) = y_i, \quad 0 \le i \le n.$$

令$\delta_n(x) = P_n(x) - Q_n(x)$. 于是

$$\delta_n(x_i) = P_n(x_i) - Q_n(x_i) = 0, \quad 0 \le i \le n.$$

其中$\delta_n(x)$ 为次数不超过n 的多项式, 且有$n+1$ 个零点. 于是

$$\delta_n(x) \equiv 0.$$

因此

$$P_n(x) \equiv Q_n(x).$$

下面证明存在性. 我们用归纳法. 当$n = 0$ 时, 显然存在常数函数P_0 使得

$$P_0(x_0) = y_0.$$

假设我们已经求得多项式$P_{k-1}(x)$ 使得

$$P_{k-1}(x_i) = y_i, \quad 0 \leq i \leq k-1.$$

下面我们来构造$P_k(x)$, 使之具有以下形式

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + c(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1}),$$

其中c 为待定常数.

显然P_k 为次数不超过k 的多项式, 而且有

$$P_k(x_i) = P_{k-1}(x_i) = y_i, \quad 0 \le i \le k-1.$$

于是我们只要决定常数c 使得$P_k(x_k) = y_k$, 这样可得

$$P_{k-1}(x_k) + c(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1}) = y_k.$$

即

$$c = -\frac{P_{k-1}(x_k) - y_k}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})}.$$

证明完毕.

牛顿多项式插值

对于给定点集$\{x_i\}_{i=0}^{n-1}$，任意n 次多项式$P_n(x)$ 可写为以下形式

$$\begin{aligned} P_n(x) &= c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots \\ &\quad + c_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1}) \\ &= \sum_{i=0}^{n} c_i \prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j). \end{aligned}$$

$$P_0(x) = c_0, \quad P_1(x) = c_0 + c_1(x-x_0)$$
$$P_2(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1).$$

牛顿多项式插值

Horner 算法或秦九韶算法（南宋, 1202~1261), 多项式求值只需n 次乘法, n 次加法. 而直接计算需要$n(n+1)/2$ 次乘法和n 次加法.

给定x, 令 $d_i = x - x_i$, $0 \le i \le n-1$. 于是

$$
\begin{aligned}
u &= c_0 + c_1 d_0 + c_2 d_0 d_1 + \cdots + c_n d_0 d_1 \cdots d_{n-1} \\
&= \Big(\cdots\big((c_n d_{n-1} + c_{n-1}) d_{n-2} + c_{n-2}\big) d_{n-3} + \cdots + c_1\Big) d_0 + c_0
\end{aligned}
$$

计算机语言

$$
\begin{aligned}
u_n &\leftarrow c_n \\
u_{n-1} &\leftarrow u_n d_{n-1} + c_{n-1} \\
u_{n-2} &\leftarrow u_{n-1} d_{n-2} + c_{n-2} \\
&\vdots \\
u_0 &\leftarrow u_1 d_0 + c_0.
\end{aligned}
$$

牛顿多项式插值

for $i = n-1$ to 0 step -1 do

$$u \leftarrow ud_i + c_i$$

end do.

牛顿多项式插值系数

$$c_0 = y_0, \quad c_k = \frac{y_k - P_{k-1}(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})} \quad (1 \le k \le n).$$

牛顿多项式插值

```
c_0 ← y_0
for k = 1 to n do
    d ← x_k − x_{k−1}
    u ← c_{k−1}
    for i = k − 2 to 0 step −1 do
        u ← u(x_k − x_i) + c_i
        d ← d(x_k − x_i)
    end do
    c_k ← (y_k − u)/d
end do
```

上面内循环计算$P_{k-1}(x_k)$ 和$(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})$.

拉格朗日插值

对于给定点集$\{x_i\}_{i=0}^{n-1}$，任意n 次多项式$P_n(x)$ 也可写为以下形式

$$P_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x).$$

其中

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

$$l_0(x) = c(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) = c\prod_{j=1}^{n}(x - x_j)$$

由

$$1 = c\prod_{j=1}^{n}(x_0 - x_j)$$

得到

$$c = \prod_{j=1}^{n}(x_0 - x_j)^{-1}, \quad l_0(x) = \prod_{j=1}^{n}\frac{x - x_j}{x_0 - x_j}.$$

同理得到

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Example 2.2

给定

x	5	-7	-6	0
y	1	-23	-54	-954

求插值函数.

拉格朗日插值

解:

$$
\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{(x+7)(x+6)x}{(5+7)(5+6)5} = \frac{1}{660}x(x+6)(x+7) \\
l_1(x) &= \frac{(x-5)(x+6)x}{(-7-5)(-7+6)(-7)} = -\frac{1}{84}x(x-5)(x+6) \\
l_2(x) &= \frac{(x-5)(x+7)x}{(-6-5)(-6+7)(-6)} = -\frac{1}{66}x(x-5)(x+7) \\
l_3(x) &= \frac{(x-5)(x+7)(x+6)}{(0-5)(0+7)(0+6)} = -\frac{1}{210}(x-5)(x+6)(x+7)
\end{aligned}
$$

插值函数

$$P_3(x) = l_0(x) - 23l_1(x) - 54l_2(x) - 954l_3(x).$$

其他插值形式

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

插值条件：

$$P(x_i) = y_i, \quad 0 \le i \le n.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_0^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

上面矩阵是Vandermonde 矩阵.

其他插值形式

将多项式写成如下形式

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) l_i(x).$$

其中，$\{l_i\}_{i=0}^{n}$ 为点x_i对应的基函数，则有方程组

$$\begin{bmatrix} l_0(x_0) & l_1(x_0) & \cdots & l_n(x_0) \\ l_0(x_1) & l_1(x_1) & \cdots & l_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_0(x_n) & l_1(x_n) & \cdots & l_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(x_0) \\ P(x_1) \\ \vdots \\ P(x_n) \end{bmatrix}$$

Theorem 2.3

设$x_0, \cdots, x_n \in [a,b]$, 对$x \in [a,b]$, 有$\xi_x \in (a,b)$ 满足

$$f(x) - P(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

证明: 若$x = x_i$, $0 \le i \le n$, 上述误差显然是成立的. 下面设x 为不同于$x_i (0 \le i \le n)$ 的点. 设

$$w(t) \equiv \prod_{i=0}^{n} (t - x_i), \quad \phi(t) = f(t) - P(t) - \lambda w(t),$$

其中λ 为待定系数.

插值误差

选择λ 使得

$$\lambda = \frac{f(x) - P(x)}{w(x)}.$$

于是$\phi(t) \in C^{n+1}[a,b]$ 在$n+2$ 个点$x, x_0, x_1, \cdots, x_n$ 等于零. 由Rolle 定理, $\phi'(t)$ 至少有$n+1$ 个不同的零点. 类似地, $\phi''(t)$ 至少有n 个不同的零点. 最后$\phi^{(n+1)}(t)$ 至少有1 个零点, $\xi_x \in (a,b)$.

插值误差

于是

$$\begin{aligned}
0 = \phi^{(n+1)}(\xi_x) &= f^{(n+1)}(\xi_x) - P^{(n+1)}(\xi_x) - \lambda w^{(n+1)}(\xi_x) \\
&= f^{(n+1)}(\xi_x) - \lambda(n+1)! \\
&= f^{(n+1)}(\xi_x) - \frac{f(x) - P(x)}{w(x)}(n+1)!.
\end{aligned}$$

即

$$f(x) - P(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

证明完毕.

Example 2.4

设$f(x)=\sin x$. 用一个次数不超过9 的多项式$P(x)$ 对$f(x)$ 插值. $x\in[0,1]$. 求最大的误差.

解

$$|f^{(10)}(\xi_x)|\le 1,\quad \prod_{i=0}^{9}|x-x_i|\le 1.$$

所以有

$$|\sin x-P(x)|\le\frac{1}{10!}<2.8\times 10^{-7}.$$

Chebyshev 多项式

Chebyshev 多项式由以下递推关系式定义：

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x,$$
$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \, n \geq 1.$$

前几个多项式为：

$$T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad , T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$
$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,$$
$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$
$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1.$$

Theorem 2.5

对$x \in [-1, 1]$, 有

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x) \quad (n \geq 0).$$

证明: 由

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B,$$

有

$$\begin{aligned}
\cos(n+1)\theta &= \cos\theta \cos n\theta - \sin\theta \sin n\theta, \\
\cos(n-1)\theta &= \cos\theta \cos n\theta + \sin\theta \sin n\theta, \\
\cos(n+1)\theta &= 2\cos\theta \cos n\theta - \cos(n-1)\theta.
\end{aligned}$$

令$\theta = \cos^{-1} x$, $x = \cos\theta$, 得$f_n(x) = \cos(n\cos^{-1} x)$ 满足

$$\begin{aligned} &f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = x, \\ &f_{n+1}(x) = 2x f_n(x) - f_{n-1}(x), \; n \geq 1. \end{aligned}$$

即$f_n = T_n$ 对任意n. 证明完毕.

Chebyshev多项式性质:

$$
\begin{aligned}
&|T_n(x)| \le 1 \quad -1 \le x \le 1,\\
&T_n(\cos\frac{j\pi}{n}) = \cos(n\cos^{-1}\cos\frac{j\pi}{n}) = (-1)^j \quad (0 \le j \le n),\\
&T_n(\cos\frac{2j-1}{2n}\pi) = \cos(n\cos^{-1}\cos\frac{2j-1}{2n}\pi) = \cos\frac{2j-1}{2}\pi = 0.
\end{aligned}
$$

Chebyshev 多项式$T_n(x)(n \ge 1)$ 首项系数为2^{n-1}.

Theorem 2.6

设p 是最高项系数为*1* 的n 次多项式, 则有

$$\|p\|_\infty = \max_{-1\le x\le 1} |p(x)| \ge 2^{1-n}.$$

Proof.

反证法. 假设

$$|p(x)| < 2^{1-n} \quad (|x| \le 1).$$

令 $q = 2^{1-n}T_n, x_i = \cos(i\pi/n)$. Chebyshev 多项式$T_n(x)$ 最高项系数为2^{n-1}, 则q 为最高项系数为1 的多项式, 且次数不超过n. 于是

$$(-1)^i p(x_i) \le |p(x_i)| < 2^{1-n} = (-1)^i q(x_i).$$

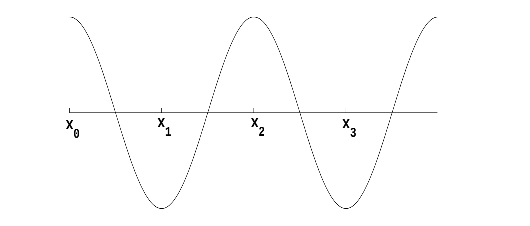
这样

$$(-1)^i [q(x_i) - p(x_i)] > 0 \quad 0 \le i \le n.$$

$$\begin{aligned}
i = 0 &\quad q(x_0) - p(x_0) > 0 \\
i = 1 &\quad q(x_1) - p(x_1) < 0 \\
i = 2 &\quad q(x_2) - p(x_2) > 0 \\
&\vdots \\
i = n &\qquad\qquad \cdots
\end{aligned}$$

Chebyshev多项式性质

Proof.



这说明$q(x) - p(x)$ 至少有n 个零点. 而$q(x) - p(x)$ 的次数不超过$n - 1$. 这样$q(x) \equiv p(x)$. 这与$|p(x)| < 2^{1-n}$ 矛盾(因为$\|q\|_\infty = 2^{1-n}$). □

节点的选择:

$$\max_{|x|\le 1}|f(x)-p(x)| \le \frac{1}{(n+1)!}\max_{|t|\le 1}|f^{(n+1)}(t)|\max_{|x|\le 1}|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)|.$$

由前面的定理2.6

$$\max_{|x|\le 1}|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)| \ge 2^{-n}.$$

当 $\prod_{i=0}^{n}(x-x_i) = 2^{-n}T_{n+1}$ 时，有

$$\max_{|x|\le 1}|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)| = 2^{-n}.$$

所以取

$$x_i = \cos(\frac{2i+1}{2n+2}\pi) \quad 0 \le i \le n.$$

这是T_{n+1} 的零点.

多项式插值的收敛性

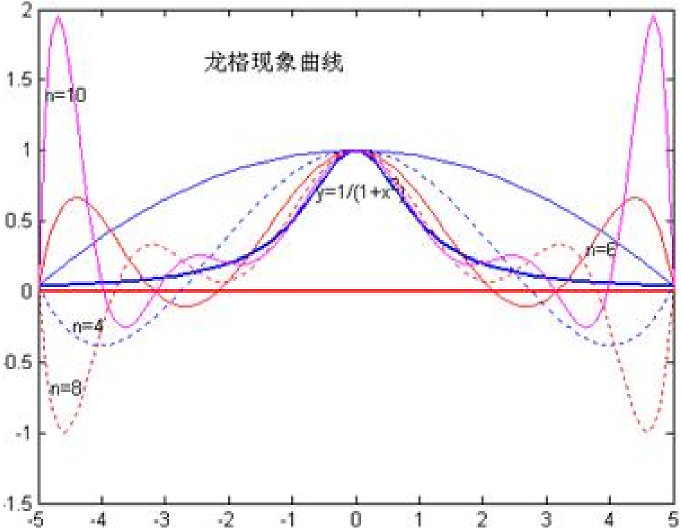
问题1：给定连续函数f，当插值函数P_n 的多项式次数增高时，是否有如下的收敛性.

$$\|f - P_n\|_\infty = \max_{a \le x \le b} |f(x) - P_n(x)| \to 0 \text{ 当} n \to \infty.$$

Meray(1884) 观察到插值多项式不收敛到原函数的现象.
Runge(1901) 观察到对于函数

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad x \in [-5, 5]$$

多项式次数越高而插值结果越偏离原函数，这就是著名的Runge现象.


龙格现象曲线
n=10
n=6
n=4
n=8
y=1/(1+x^2)
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

Example 2.7

对$f(z)=\frac{1}{z}$, 选定点

$$\omega_j=\left(\sqrt[n]{1}\right)^j=e^{\frac{2\pi i}{n}j},\quad j=1,2,\cdots,n.$$

求$P_{n-1}(z)$ 使得: $P_{n-1}(\omega_j)=f(\omega_j)$, $j=1,2,\cdots,n$, 可得

$$P_{n-1}(z)=z^{n-1}.$$

$$P_{n-1}(\omega_j)=\omega_j^{n-1}=\frac{\omega_j^n}{\omega_j}=\frac{1}{\omega_j}=f(\omega_j)\quad 1\le j\le n.$$

$$\|f-P_{n-1}\|_\infty=\max_{|z|=1}|f(z)-P_{n-1}(z)|=\max_{|z|=1}|z^{-1}-z^{n-1}|$$

$$=\max_{|z|=1}\frac{1}{|z|}|1-z^n|=2.$$

多项式插值的收敛性

Theorem 2.8

(Faber 定理) 对任意给定的点列

$$a \le x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)} \le b \quad (n \ge 0)$$

存在$[a,b]$ 上的连续函数f, 其插值P_n 不一致收敛于f.

Theorem 2.9

对$[a,b]$ 上任意连续函数f, 存在点列

$$a \le x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)} \le b \ (n \ge 0)$$

其插值函数P_n 一致收敛于f, 即

$$\lim_{n\to\infty} \|f - P_n\|_\infty = 0.$$

目录

1 交通流模型

2 多项式插值
- 牛顿多项式插值
- 拉格朗日插值
- 其他插值形式
- 插值误差
- Chebyshev 多项式
- 多项式插值的收敛性

3 样条插值
- 自然三次样条

4 追赶法
- 三对角矩阵(对角占优)
- 追赶法求解方程$Ax = d$

5 作业

样条插值

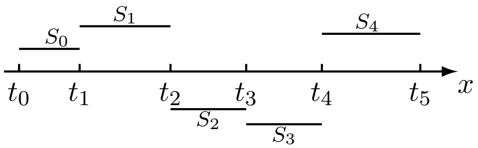
样条函数 S (k 次).

1. 在$[t_{i-1}, t_i)$ 上, S 是一个次数不超过k 的多项式.
2. $S \in C^{k-1}[t_0, t_n]$.

样条插值

$k = 0$ 时

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = c_0 & x \in [t_0, t_1), \\ S_1(x) = c_1 & x \in [t_1, t_2) \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x) = c_{n-1} & x \in [t_{n-1}, t_n] \end{cases}$$

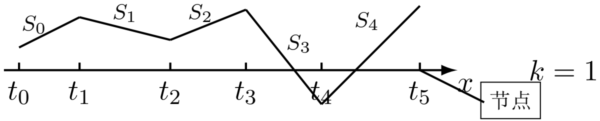


$k = 0$

样条插值

$k = 1$ 时

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0 x + b_0 & x \in [t_0, t_1), \\ S_1(x) = a_1 x + b_1 & x \in [t_1, t_2) \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x) = a_{n-1} x + b_{n-1} & x \in [t_{n-1}, t_n] \end{cases}$$



三次样条函数

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & x \in [t_0, t_1), \\ S_1(x) & x \in [t_1, t_2), \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x) & x \in [t_{n-1}, t_n] \end{cases}$$

x	t_0	t_1	t_2	$\cdots$	t_n
y	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

$$S_{i-1}(t_i) = S_i(t_i) = y_i \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

自由度数: 每个单元4 个, 共$4n$
约束条件:

每个内节点, 2 个插值条件, 2 个连续条件, 共$4(n-1)$ 个条件. 两个端点t_0, t_n, 2 个插值条件. 总共$4n-2$ 个条件. 因此, 还需要2 个条件.

$S''(x)$ 在内节点连续. $S''(x)$ 在$[t_i, t_{i+1}]$ 上是线性函数, 在$[t_0, t_n]$ 上是分段(片)线性函数.

设$S_i''(t_i) = z_i$, $S_i''(t_{i+1}) = z_{i+1}$.

$$S_i''(x) = \frac{z_i}{h_i}(t_{i+1} - x) + \frac{z_{i+1}}{h_i}(x - t_i).$$

其中$h_i = t_{i+1} - t_i$.

积分两次

$$S_i(x) = \frac{z_i}{6h_i}(t_{i+1} - x)^3 + \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x - t_i)^3 + C(x - t_i) + D(t_{i+1} - x).$$

其中C 和D 为积分常数. 由插值条件

$$S_i(t_i) = y_i, \quad S_i(t_{i+1}) = y_{i+1}$$

得

$$\begin{aligned} S_i(x) =& \frac{z_i}{6h_i}(t_{i+1} - x)^3 + \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x - t_i)^3 + (\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1}h_i}{6})(x - t_i) \\ & + (\frac{y_i}{h_i} - \frac{z_i h_i}{6})(t_{i+1} - x) \end{aligned}$$

下面确定$z_0, z_1, \cdots, z_n$，由$S'(x)$ 在节点$z_1, \cdots, z_{n-1}$ 的连续性, 即

$$S'_{i-1}(t_i) = S'_i(t_i) \quad 1 \le i \le n-1,$$

可得

$$\begin{aligned} S'_{i-1}(t_i) &= \frac{h_{i-1}}{6} z_{i-1} + \frac{h_{i-1}}{3} z_i - \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{y_i}{h_{i-1}} \\ S'_i(t_i) &= -\frac{h_i}{3} z_i - \frac{h_i}{6} z_{i+1} - \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i+1}}{h_i} \end{aligned}$$

可得

$$h_{i-1} z_{i-1} + 2(h_i + h_{i-1}) z_i + h_i z_{i+1} = \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{6}{h_{i-1}}(y_i - y_{i-1})$$

其中，$i = 1, 2 \cdots, n-1.$

自然三次样条

若取$z_0 = z_n = 0$，有

$$
\begin{bmatrix}
u_1 & h_1 & & & & \\
h_1 & u_2 & h_2 & & & \\
 & h_2 & u_3 & h_3 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & h_{n-3} & u_{n-2} & h_{n-2} \\
 & & & & h_{n-2} & u_{n-1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ z_{n-1} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (3.1)
$$

其中

$$
h_i = t_{i+1} - t_i, \quad u_i = 2(h_i + h_{i-1})
$$
$$
b_i = \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i), \quad v_i = b_i - b_{i-1}
$$

自然三次样条

算法如下:

in put n, (t_i), (y_i)

for $i = 0$ to $n-1$ do

$\quad h_i \leftarrow t_{i+1} - t_i$

$\quad b_i \leftarrow 6(y_{i+1} - y_i)/h_i$

end do

$u_1 \leftarrow 2(h_0 + h_1)$

$v_1 \leftarrow b_1 - b_0$

for $i = 2$ to $n-1$ do

$\quad u_i \leftarrow 2(h_i + h_{i-1}) - h_{i-1}^2/u_{i-1}$

$\quad v_i \leftarrow b_i - b_{i-1} - h_{i-1}v_{i-1}/u_{i-1}$

end do

$z_n \leftarrow 0$

for $i = n-1$ to 1 step -1 do

$\quad z_i \leftarrow (v_i - h_i z_{i+1})/u_i$

end do

$z_0 \leftarrow 0$

out put (z_i)

自然三次样条

在上面的算法中有

$$u_i = 2(h_i + h_{i-1}) - \frac{h_{i-1}^2}{u_{i-1}} > 2(h_i + h_{i-1}) - h_{i-1} > h_i = t_{i+1} - t_i > 0.$$

最后得自然样条函数

$$S_i(x) = y_i + (x - t_i)[C_i + (x - t_i)[B_i + (x - t_i)A_i]] \quad x \in [t_i, t_{i+1})$$

其中

$$A_i = \frac{1}{6h_i}(z_{i+1} - z_i),\ B_i = \frac{z_i}{2},\ C_i = -\frac{h_i}{6}z_{i+1} - \frac{h_i}{3}z_i + \frac{1}{h_i}(y_{i+1} - y_i).$$

Theorem 3.1

设$f \in C^2[a,b]$, 且$a = t_0 < \cdots < t_n = b$. S 是插值f 的自然样条函数. 则

$$\int_a^b [S''(x)]^2\,dx \le \int_a^b [f''(x)]^2\,dx.$$

证明: 设$g = f - S$，$g(t_i) = 0$, $0 \le i \le n$. 于是有

$$\int_a^b [f''(x)]^2\,dx = \int_a^b (S'')^2\,dx + \int_a^b (g'')^2\,dx + 2\int_a^b S''g''\,dx$$

下面证明

$$\int_a^b S''g''\,dx \ge 0$$

利用$S''(t_0) = S''(t_n) = 0$

$$
\begin{aligned}
\int_a^b S'' g''\,dx &= \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} S'' g''\,dx \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\{ (S''g')(t_i) - (S''g')(t_{i-1}) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} S''' g'\,dx \right\} \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} S''' g'\,dx = -\sum_{i=1}^{n} c_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} g'\,dx \\
&= -\sum_{i=1}^{n} c_i [g(t_i) - g(t_{i-1})] = 0
\end{aligned}
$$

证明完毕.

目录

1 交通流模型

2 多项式插值
- 牛顿多项式插值
- 拉格朗日插值
- 其他插值形式
- 插值误差
- Chebyshev 多项式
- 多项式插值的收敛性

3 样条插值
- 自然三次样条

4 追赶法
- 三对角矩阵(对角占优)
- 追赶法求解方程$Ax = d$

5 作业

追赶法

Example 4.1

$$
\begin{cases}
-\frac{d^2u}{dx^2} = f \\
u(0) = u(1) = 0
\end{cases}
$$

差分法 取等距节点$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1$, $h = x_i - x_{i-1}$, 在节点处插商代替微商

$$
-\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = f(x_i),\ i = 1, \cdots, n
$$

$$
u_0 = u_{n+1} = 0.
$$

追赶法

得到如下方程组

$$
\begin{bmatrix}
2 & -1 & & & \\
-1 & 2 & -1 & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & -1 & 2 & -1 \\
 & & & -1 & 2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
h^2 f(x_1) \\ h^2 f(x_2) \\ \vdots \\ h^2 f(x_{n-1}) \\ h^2 f(x_n)
\end{bmatrix}
$$

三对角矩阵(对角占优)

对于三对角矩阵(对角占优)

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & b_n & a_n \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} (1)\ |a_1| > |c_1| > 0 \\ (2)\ |a_i| \geq |b_i| + |c_i|, b_i, c_i \neq 0, \\ \qquad\qquad 2 \leq i \leq n-1 \\ (3)\ |a_n| > |b_n| > 0. \end{array}$$

三对角矩阵(对角占优)

矩阵分解(高斯消去法的矩阵形式分解)

$$A = LU, \quad L = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \beta_n & \alpha_n \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \gamma_{n-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

其中

$$\beta_i = b_i, \quad i = 2, 3, \cdots, n,$$
$$\alpha_1 = a_1,\ \alpha_i \gamma_i = c_i,\ i = 1, 2, \cdots, n-1,$$
$$\beta_i \gamma_{i-1} + \alpha_i = a_i,\ i = 2, 3, \cdots, n.$$

三对角矩阵(对角占优)

$\gamma_1 = \frac{c_1}{\alpha_1} = \frac{c_1}{a_1}$ 存在，且$|\gamma_1| < 1$. 从而$\alpha_2 = a_2 - \beta_2\gamma_1 = a_2 - b_2\gamma_1$.
由条件

$$|\alpha_2| \geq |a_2| - |b_2||\gamma_1| > |a_2| - |b_2| \geq |c_2| > 0.$$

从而由$\alpha_2\gamma_2 = c_2$ 可以确定γ_2，且$0 < |\gamma_2| < 1$. 如此可由

$$\alpha_i = a_i - \beta_i\gamma_{i-1} \text{ 和} \gamma_i = \frac{c_i}{\alpha_i}$$

唯一确定 α_i 和 γ_i，且 $0 < |\gamma_{i-1}| < 1$
$\Rightarrow$ $|\alpha_i| > |c_i| \Rightarrow 0 < |\gamma_i| < 1$. 最后由 $\alpha_n = a_n - \beta_n\gamma_{n-1}$ 确定α_n.

追赶法求解方程$Ax=d$

用追赶法求解方程$Ax=d$的步骤如下：

第一步 计算α_i 和γ_i

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{c_1}{a_1},\ \alpha_1 = a_1\\ \alpha_i &= a_i - b_i\gamma_{i-1},\ \gamma_i = \frac{c_i}{\alpha_i},\ i=2,3,\cdots,n-1\\ \alpha_n &= a_n - b_n\gamma_{n-1}\end{aligned}$$

第二步 计算$Ly=d$, 解y

$$\begin{aligned}y_1 &= \frac{d_1}{\alpha_1}\\ y_i &= \frac{(d_i - b_i y_{i-1})}{\alpha_i},\ i=2,3,\cdots,n.\end{aligned}$$

第三步 计算$Ux = y$, 解x.

$$
\begin{aligned}
x_n &= y_n \\
x_i &= y_i - \gamma_i x_{i+1},\ i = n-1, n-2, \cdots, 1.
\end{aligned}
$$

目录

1 交通流模型

2 多项式插值
- 牛顿多项式插值
- 拉格朗日插值
- 其他插值形式
- 插值误差
- Chebyshev 多项式
- 多项式插值的收敛性

3 样条插值
- 自然三次样条

4 追赶法
- 三对角矩阵(对角占优)
- 追赶法求解方程$Ax = d$

5 作业

作业

1. 对函数$\frac{1}{1+x^2}$ 和e^{-x^2}, $x \in [-5,5]$, 用等距节点作为插值节点插值, 画出图像(选若干个不同次数的多项式比较).
2. $P_n(x) = y_0 l_0(x) + \cdots + y_n l_n(x)$, 计算$x^n$ 前的系数.
3. $u = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{i} d_j$, 写一种算法, 计算上述和.
4. 证明Chebyshev 多项式的奇偶性.
5. 对函数$\frac{1}{1+x^2}$ 和e^{-x^2}, $x \in [-5,5]$, 选取Chebyshev 多项式的零点作为插值节点插值, 画出图像(选若干个不同次数的多项式比较).
6. 证明自然3 次样条得到的方程(3.1) 中的矩阵是满秩的.
7. 思考二次样条.
8. 验证中心差分格式具有二阶精度，即

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = O(h^2)$$

谢谢！